ALGEBRA Z GEOMETRIĄ ANALITYCZNĄ
ALGEBRA LINIOWA 1 (rok akad. 2015/16)

Kursy MAP 1029, 1039, 1070, 1140, 1141, 3046, 3055, 3074

Lista zdań obejmuje cały materiał kursu oraz określa rodzaje i przybliżony stopień trudności zadań, które pojawią się na kolokwiach i egzaminach. Na ćwiczeniach należy rozwiązać 1-2 podpunkty z każdego zadania. Wyjątkiem są zadania oznaczone literą (P) oraz symbolem $(*)$. Zadania oznaczone literą (P) są proste i należy je rozwiązać samodzielnie. Z kolei zadania oznaczone gwiazdką (*) są trudne. Te nieobowiązkowe zadania kierujemy do ambitnych studentów. Na końcu listy umieszczono po 4 przykładowe zestawy zadań z obu kolokwiów oraz egzaminu podstawowego i poprawkowego.

Uzdolnionym studentom proponujemy udział w egzaminach na ocenę celującą z algebry i analizy. Zadania z tych egzaminów z kilku ubiegłych lat można znaleźć na stronie internetowej

http://www.wmat.pwr.edu.pl/2831151.231.dhtml

Opracowanie: doc. dr Zbigniew Skoczylas

Lista zadań*

1. (P) Podać przykłady liczb rzeczywistych, dla których **nie zachodzą** równości:

(a) $(x+y)^2 = x^2 + y^2$; (b) $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$; (c) $\dfrac{1}{x+y} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$;

(d) $\sqrt{x^2} = x$; (e) $\dfrac{x}{y} + \dfrac{u}{v} = \dfrac{x+u}{y+v}$; (f) $\sin 2x = 2\sin x$;

(h) $|x+y| = |x| + |y|$; (i) $\dfrac{\log_2 a}{\log_2 b} = \log_2(a-b)$; (j) $a^n \cdot a^m = a^{n\cdot m}$.

2. Za pomocą indukcji matematycznej uzasadnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzą tożsamości:

(a) $1 + 3 + \ldots + (2n-1) = n^2$;

(b) $1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \ldots + n(n+1) = \dfrac{n\,(n+1)\,(n+2)}{3}$;

(c) $\left(1+\dfrac{1}{1}\right)^1 \cdot \left(1+\dfrac{1}{2}\right)^2 \cdot \ldots \cdot \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \dfrac{(n+1)^n}{n!}$.

3. Korzystając z indukcji matematycznej uzasadnić nierówności:

(a) $2^n > n^2$ dla $n \geqslant 5$; (b) $\dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \ldots + \dfrac{1}{n^2} \leqslant 2 - \dfrac{1}{n}$ dla $n \in \mathbb{N}$;

(c) $n! > 2^n$ dla $n \geqslant 4$; (d) $n! < \left(\dfrac{n}{2}\right)^n$ dla $n \geqslant 6$;

(e) $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$ dla $x \geqslant -1$ oraz $n \in \mathbb{N}$ (nierówność Bernoulliego).

---

*Zadania z listy pochodzą z książek *Algebra i geometria analityczna (Definicje, twierdzenia, wzory; Przykłady i zadania; Kolokwia i egzaminy)*, oraz *Wstęp do analizy i algebry*.

4. Metodą indukcji matematycznej pokazać, że dla każdej liczby naturalnej n liczba:
(a) $n^5 - n$ jest podzielna przez 5; (b) $4^n + 15n - 1$ jest podzielna przez 9.

5. Zastosować wzór dwumianowy Newtona do wyrażeń:
(a) $(2x-y)^4$; (b) $\left(c+\sqrt{2}\right)^6$; (c) $\left(x+\dfrac{1}{x^3}\right)^5$; (d) $(\sqrt{u}-\sqrt[4]{v})^8$.

6.* Korzystając ze wzoru dwumianowego Newtona obliczyć sumy:
(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$; (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k$; (c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k$.

7. (a) W rozwinięciu wyrażenia $\left(a^3+\dfrac{1}{a^2}\right)^{15}$ znaleźć współczynnik przy a^5;
(b) W rozwinięciu wyrażenia $\left(\sqrt[4]{x^5}-\dfrac{3}{x^3}\right)^7$ znaleźć współczynnik przy $\sqrt[4]{x}$.

★★★

8. Porównując części rzeczywiste i urojone obu stron równań znaleźć ich rozwiązania:
(a) $\overline{z}=(2-i)z$; (b) $z^2+4=0$; (c) $(1+3i)\,z+(2-5i)\,\overline{z}=2i-3$; (d*) $z^3=1$.

9. Na płaszczyźnie zespolonej narysować zbiory liczb zespolonych spełniających warunki:
(a) $\operatorname{Re}(z+1)=\operatorname{Im}(2z-4i)$; (b) $\operatorname{Re}\left(z^2\right)=0$; (c) $\operatorname{Im}\left(z^2\right)\leqslant 8$; (d) $\operatorname{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right)>\operatorname{Im}(iz)$.

10. Korzystając z interpretacji geometrycznej modułu różnicy liczb zespolonych wyznaczyć i narysować zbiory liczb zespolonych spełniających warunki:
(a) $|z+2-3i|<4$; (b) $|z+5i|\geqslant|3-4i|$; (c) $|z-1|=|1+5i-z|$; (d) $|z+3i|<|z-1-4i|$;
(e) $|iz+5-2i|<|1+i|$; (f) $|\overline{z}+2-3i|<5$; (g) $\left|\dfrac{z-3i}{z}\right|>1$; (h) $\left|\dfrac{z^2+4}{z-2i}\right|\leqslant 5$;
(i) $\left|z^2+2iz-1\right|<9$; (j*) $2|z+1|<\left|z^2-z-2\right|\leqslant 3|z-2|$; (k) $|(1+i)z-4|=|(1-i)z+6|$.

11. Korzystając ze wzoru de Moivre'a obliczyć:
(a) $\left(-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^6$; (b) $\left(\sqrt[5]{2}-i\sqrt[5]{2}\right)^{15}$; (c) $\left(2i-\sqrt{12}\right)^9$;
(d) $\left(\sqrt{3}-i\right)^{20}$; (e*) $(i-2)^{24}(13+9i)^8$; (f*) $\dfrac{(7+i)^{11}}{(2+i)^{22}}$.

12. Wyznaczyć i narysować na płaszczyźnie zespolonej elementy pierwiastków:
(a) $\sqrt[4]{-16}$; (b) $\sqrt[3]{27i}$; (c*) $\sqrt[4]{(2-i)^8}$; (d) $\sqrt[6]{8}$.

13. W zbiorze liczb zespolonych rozwiązać równania:
(a) $z^2-2z+10=0$; (b) $z^2+3iz+4=0$; (c) $z^4+5z^2+4=0$;
(d) $z^2+(1-3i)\,z-2-i=0$; (e) $z^6=(1-i)^{12}$; (f) $(z-i)^4=(z+1)^4$.

★★★

14. (P) Znaleźć pierwiastki całkowite wielomianów:
(a) x^3+3x^2-4; (b) $x^4-2x^3+x^2-8x-12$; (c) x^4-x^2-2.

15. Znaleźć pierwiastki wymierne wielomianów:
(a) $12x^3+8x^2-3x-2$; (b) $18x^3-9x^2-2x+1$; (c) $6x^4+7x^2+2$.

16. (P) Wyznaczyć pierwiastki rzeczywiste lub zespolone wraz z krotnościami wielomianów:
(a) $(x-1)(x+2)^3$; (b) $(2x+6)^2(1-4x)^5$; (c) $\left(z^2-1\right)\left(z^2+1\right)^3\left(z^2+9\right)^4$.

17. Nie wykonując dzieleń wyznaczyć reszty z dzielenia wielomianu P przez wielomian Q, jeżeli:
(a) $P(x)=x^8+3x^5+x^2+4$, $Q(x)=x^2-1$;
(b) $P(x)=x^{47}+2x^5-13$, $Q(x)=x^3-x^2+x-1$;
(c) $P(x)=x^{99}-2x^{98}+4x^{97}$, $Q(x)=x^4-16$;
(d*) $P(x)=x^{2006}+x^{1002}-1$, $Q(x)=x^4+1$;
(e*) $P(x)=x^{444}+x^{111}+x-1$, $Q(x)=\left(x^2+1\right)^2$.

18. Pokazać, że jeżeli liczba zespolona z_1 jest pierwiastkiem wielomianu rzeczywistego P, to liczba $\overline{z_1}$ także jest pierwiastkiem wielomianu P. Korzystając z tego faktu znaleźć pozostałe pierwiastki zespolone wielomianu $P(x)=x^4-4x^3+12x^2-16x+15$ wiedząc, że jednym z nich jest $x_1=1+2i$.

19. Podane wielomiany rozłożyć na nierozkładalne czynniki rzeczywiste:
(a) x^3-27; (b) x^4+16; (c) x^4+x^2+4; (d*) x^6+1.

20. Podane funkcje wymierne rozłożyć na rzeczywiste ułamki proste:
(a) $\dfrac{2x+5}{x^2-x-2}$; (b) $\dfrac{x+9}{x(x+3)^2}$; (c) $\dfrac{3x^2+4x+3}{x^3-x^2+4x-4}$; (d) $\dfrac{x^3-2x^2-7x+6}{x^4+10x^2+9}$.

★★★

21. (P) Dla par macierzy A, B wykonać (jeśli to jest możliwe) działania $3A-\frac{1}{2}B$, A^T, AB, BA, A^2:
(a) $A=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 0 & -6 \\ -8 & 2 \end{bmatrix}$; (b) $A=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$;

(c) $A=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$; (d) $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

22. (P) Rozwiązać równanie macierzowe $3\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}-X\right)=X+\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

23. (P) Znaleźć niewiadome x, y, z spełniające równanie $2\begin{bmatrix} x+2 & y+3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ y & z \end{bmatrix}^T$.

24. * Pokazać, że każdą macierz kwadratową można przedstawić jednoznacznie jako sumę macierzy symetrycznej $\left(A^T=A\right)$ i antysymetrycznej $\left(A^T=-A\right)$. Napisać to przedstawienie dla macierzy

$$B=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -3 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

★★★

25. Napisać rozwinięcia Laplace'a wyznaczników wg wskazanych kolumn lub wierszy (nie obliczać wyznaczników w otrzymanych rozwinięciach):

(a) $\begin{vmatrix} -1 & 4 & \mathbf{3} \\ -3 & 1 & \mathbf{0} \\ 2 & 5 & \mathbf{-2} \end{vmatrix}$, trzecia kolumna; (b) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 & 7 \\ -2 & 4 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 6 \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-3} \end{vmatrix}$, czwarty wiersz.

26. Obliczyć wyznaczniki:

(a) $\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -7 \end{vmatrix}$; (b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$; (c) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 5 & 7 \\ 4 & 0 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 2 & -2 \end{vmatrix}$.

27. Korzystając z własności wyznaczników uzasadnić, że macierze są osobliwe:

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & -4 \\ -1 & -2 & 2 \\ 3 & 5 & -6 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & -2 \\ 7 & 5 & 2 & -5 \\ 5 & 7 & 4 & -4 \\ 3 & 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.

28. (a) Wiadomo, że $\det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & 0 \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} & 0 \\ 5 & -2 & 3 \end{bmatrix} = -24$. Obliczyć $\det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{bmatrix}$;

(b) Wiadomo, że $\det \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} & 0 \\ 5 & \boldsymbol{z} & \boldsymbol{t} & 0 \\ 7 & -4 & 5 & -2 \end{bmatrix} = 18$. Obliczyć $\det \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} & \boldsymbol{t} \end{bmatrix}$.

29.* Obliczyć wyznaczniki macierzy:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{2} & 3 & \mathbf{4} & 5 \\ \mathbf{2} & \mathbf{2} & 3 & \mathbf{4} & 5 \\ 3 & 3 & 3 & \mathbf{4} & 5 \\ \mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{4} & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{2} & \mathbf{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} & \mathbf{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{2} \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{3} & 0 & \ldots & 0 \\ \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{3} & \ldots & 0 \\ 0 & \mathbf{2} & \mathbf{5} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{3} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \mathbf{5} \end{bmatrix}_{n\times n}$.

30. Korzystając z twierdzenia o postaci macierzy odwrotnej wyznaczyć macierze odwrotne do:

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$; (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix}$; (c) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$.

31. Korzystając z metody dołączonej macierzy jednostkowej znaleźć macierze odwrotne do :

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$; (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -12 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}$; (c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

32. Wiadomo, że $A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -8 & -2 & 0 \\ 10 & 12 & -6 \end{bmatrix}$. Wyznaczyć $\left(\frac{1}{2}A\right)^{-1}$.

33. Znaleźć rozwiązania równań macierzowych:

(a) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$; (b) $X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$;

(c) $X \cdot \begin{bmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$; (d) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$;

(e) $X \cdot \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$; (f) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot X^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$.

★★★

34. Korzystając ze wzorów Cramera wyznaczyć wskazaną niewiadomą z układów równań liniowych:

(a) $y \text{ −>} \begin{cases} 2x - y = 0, \\ 3x + 2y = 5; \end{cases}$ (b) $x \text{ −>} \begin{cases} x + y + 2z = -1, \\ 2x - y + 2z = -4, \\ 4x + y + 4z = -2; \end{cases}$ (c) $z \text{ −>} \begin{cases} 2x + 3y + 11z + 5t = 2, \\ x + y + 5z + 2t = 1, \\ 2x + y + 3z + 2t = -3, \\ x + y + 3z + 4t = -3. \end{cases}$

35. Metodą eliminacji Gaussa rozwiązać układy równań:

(a) $\begin{cases} x + y + 2z = -1, \\ 2x - y + 2z = -4, \\ 4x + y + 4z = -2; \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 3x - 2y - 5z + t = 3, \\ 2x - 3y + z + 5t = -3, \\ x + 2y - 4t = -3, \\ x - y - 4z + 9t = 22. \end{cases}$

36. (a) Znaleźć trójmian kwadratowy, który przechodzi przez punkty $(-1,2), (0,-1), (2,4)$.

(b) Wyznaczyć współczynniki a, b, c funkcji $y = a2^x + b3^x + c4^x$, która w punktach $-1, 0, 1$ przyjmuje odpowiednio wartości 3/4, 1, 1.

(c) Funkcja $y(x) = A\cos 2x + B\sin 2x$ spełnia równanie różniczkowe $y'' - 6y' + 13y = 25\sin 2x$. Wyznaczyć współczynniki A, B.

37. (a) Dla jakich wartości parametru m, podany układ jednorodny ma niezerowe rozwiązanie

$$\begin{cases} mx + y + 2z = 0, \\ 2x - y + mz = 0, \\ mx + y + 4z = 0? \end{cases}$$

(b) Dla jakich wartości parametrów a, b, c, d, podany układ równań liniowych jest sprzeczny

$$\begin{cases} x + y = a, \\ z + t = b, \\ x + z = c, \\ y + t = d? \end{cases}$$

(c) Znaleźć wartości parametru p, dla których podany układ równań liniowych ma tylko jedno rozwiązanie

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -1, \\ 2x - py + z = 3, \\ 2x + y - pz = 5. \end{cases}$$

★★★

38. (P) Trójkąt jest rozpięty na wektorach $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$. Wyrazić środkowe trójkąta przez $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$.

39. (P) Bokami równoległoboku są wektory $\boldsymbol{a} = (-3, 4)$, $\boldsymbol{b} = (1, 2)$. Wyznaczyć kąt ostry między przekątnymi równoległoboku.

40. Długości wektorów $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ wynoszą odpowiednio 3, 5. Znamy iloczyn skalarny $\boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{b} = -2$. Obliczyć $(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) \circ (2\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b})$.

41. (P) Wyznaczyć równanie prostej, która przechodzi przez punkt $P = (-1, 3)$ i tworzy kąt 120^o z dodatnią częścią osi Ox.

42. (P) Napisać równania prostej (normalne, krawędziowe, parametryczne) przechodzącej przez punkty $P_1 = (2, 3)$, $P_2 = (-3, 7)$.

43. (P) Znaleźć punkty przecięcia prostej $l : \begin{cases} x = 4 - 2t, \\ y = -6 + t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ z osiami układu współrzędnych. Czy punkt $P = (4, 7)$ należy do prostej l?

44. Znaleźć punkt przecięcia prostych: $k : \begin{cases} x = 1 - t, \\ y = 3 + t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$, $\quad l : \begin{cases} x = 2t, \\ y = 3 - t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

45. (P) Znaleźć równanie prostej, która przechodzi przez punkt $P = (-1, 2)$ i jest

(a) równoległa do prostej $3x - y + 2 = 0$; (b) prostopadła do prostej $x + y = 0$.

46. Dla jakiej wartości parametru m, odległość punktów $P = (1, 0)$ i $Q = (m + 3, -2)$ jest równa 4?

47. (P) Wyznaczyć odległość punktu $P_0 = (-4, 1)$ od prostej l o równaniu $3x + 4y + 12 = 0$.

48. (P) Znaleźć odległość prostych równoległych l_1, l_2 o równaniach odpowiednio $x - 2y = 0$, $-3x + 6y - 15 = 0$.

49. Obliczyć wysokość trójkąta o wierzchołkach $A = (0, 0)$, $B = (-1, 3)$, $C = (2, 5)$ opuszczoną z wierzchołka C.

★★★

50. (a) Dla jakich wartości parametrów p, q wektory $\boldsymbol{a} = (1 - p, 3, -1)$, $\boldsymbol{b} = (-2, 4 - q, 2)$ są równoległe?

(b) Dla jakich wartości parametru s wektory $\boldsymbol{p} = (s, 2, 1 - s)$, $\boldsymbol{q} = (s, 1, -2)$ są prostopadłe?

51. (P) Znaleźć wersor, który jest prostopadły do wektorów $\boldsymbol{u} = (-1, 3, 0)$, $\boldsymbol{v} = (0, 1, 1)$.

52. (P) Wyznaczyć cosinus kąta między wektorami $\boldsymbol{p} = (0, 3, 4)$, $\boldsymbol{q} = (2, 1, -2)$.

53. (a) Obliczyć pole równoległoboku rozpiętego na wektorach $\boldsymbol{u} = (-1, 2, 5)$, $\boldsymbol{v} = (0, 3, 2)$.

(b) Obliczyć pole trójkąta o wierzchołkach $A = (0, 0, 1)$, $B = (3, 0, 0)$, $C = (0, -5, 0)$.

(c) Trójkąt ma wierzchołki $A = (0, 0, 1)$, $B = (2, 3, -2)$, $C = (1, 1, 4)$. Obliczyć wysokość trójkąta opuszczoną z wierzchołka C.

54. (a) Obliczyć objętość równoległościanu rozpiętego na wektorach: $\boldsymbol{a} = (1, 2, 3)$, $\boldsymbol{b} = (0, 4, 1)$, $\boldsymbol{c} = (-1, 0, 2)$.

(b) Obliczyć objętość czworościanu o wierzchołkach: $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, 2, 3)$, $C = (0, 4, 1)$, $D = (2, 2, 2)$.

(c) Dla czworościanu z punktu (b) obliczyć wysokość opuszczoną z wierzchołka A.

55. Znaleźć równania normalne i parametryczne płaszczyzny:

(a) przechodzącej przez punkty $P = (1, -1, 0)$, $Q = (2, 3, 7)$, $R = (4, 0, 1)$;

(b) przechodzącej przez punkt $A = (-2, 5, 4)$ oraz zawierającą oś Oz;

(c) przechodzącej przez punkt $A = (-2, 5, 4)$ oraz prostopadłej do osi Oy.

56. Pokazać, że równania parametryczne:

$$\begin{cases} x = 3 - t + 2s, \\ y = -1 + t, \\ z = 2 + t - 3s \end{cases} \quad (t,\, s \in \mathbb{R}), \qquad \begin{cases} x = 4 + 3t + 3s, \\ y = t - s, \\ z = -2t - 4s \end{cases} \quad (t,\, s \in \mathbb{R})$$

przedstawiają tę samą płaszczyznę.

57. (a) Płaszczyznę $\pi : 2x + y - z - 7 = 0$ zapisać w postaci parametrycznej.

(b) Płaszczyznę $\pi : \begin{cases} x = t + s, \\ y = -2 - 2s, \\ z = 3 + 3t - s \end{cases}$ $(t,\, s \in \mathbb{R})$ przekształcić do postaci normalnej.

58. Znaleźć równanie parametryczne i krawędziowe prostej:

(a) przechodzącej przez punkty $A = (-3, 4, 1)$, $B = (0, 2, 1)$.

(b) przechodzącej przez punkt $P = (3, -1, 2)$ i przecinającej prostopadle oś Oy.

59. Pokazać, że równania:

$$\begin{cases} x = 1 - t, \\ y = 2 - 3t, \\ z = 4t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}), \qquad \begin{cases} x = 2t, \\ y = -1 + 6t, \\ z = 4 - 8t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

przedstawiają tę samą prostą.

60. (a) Prostą $l : \begin{cases} x + y - 3 = 0, \\ -y + z - 1 = 0 \end{cases}$ zapisać w postaci parametrycznej.

(b) Prostą $l : x = 3,\ y = 2 - 2t,\ z = t \ (t \in \mathbb{R})$ zapisać w postaci krawędziowej.

61. Wyznaczyć punkt przecięcia:

(a) prostej $l : x = t,\ y = 1 - 2t,\ z = -3 + 2t \ (t \in \mathbb{R})$ oraz płaszczyzny $\pi : 3x - y - 2z - 5 = 0$;

(b) płaszczyzn $\pi_1 : x + 2y - z - 5 = 0$, $\pi_2 : x + 2y + 2 = 0$, $\pi_3 : x + y + z = 0$;

(c) prostych $l_1 : x = 1 - t,\ y = 1,\ z = -3 + 2t \ (t \in \mathbb{R})$, $l_2 : x = t,\ y = 3 - 2t,\ z = 2 - 5t \ (t \in \mathbb{R})$.

62. Obliczyć odległość:

(a) punktu $P = (0, 1, -2)$ od płaszczyzny $\pi : 3x - 4y + 12z - 1 = 0$;

(b) płaszczyzn równoległych $\pi_1 : x - 2y + 2z - 3 = 0$, $\pi_2 : -2x + 4y - 4z + 18 = 0$;

(c) punktu $P = (2, -5, 1)$ od prostej $l : x = t,\ y = 1 - 2t,\ z = -3 + 2t \ (t \in \mathbb{R})$;

(d) prostych równoległych $l_1 : \begin{cases} x + y + z - 3 = 0, \\ x - 2y - z - 1 = 0, \end{cases}$ $l_2 : \begin{cases} x + y + z - 3 = 0, \\ x - 2y - z + 4 = 0; \end{cases}$

(e) prostych skośnych

$$l_1 : x = 1 - t,\ y = 1,\ z = -3 + 2t \ (t \in \mathbb{R}), \quad l_2 : x = s,\ y = 3 - 2s,\ z = 1 - 5s \ (s \in \mathbb{R}).$$

63. Wyznaczyć rzut prostopadły punktu $P = (1, -2, 0)$ na:

(a) płaszczyznę $\pi : x + y + 3z - 5 = 0$; (b) prostą $l : x = 1 - t,\ y = 2t,\ z = 3t$.

64. Obliczyć kąt między:

(a) płaszczyznami $\pi_1 : x - y + 3z = 0$, $\pi_2 : -2x + y - z + 5 = 0$;

(b) prostą $l : \begin{cases} x + y + z - 3 = 0, \\ x - 2y - z - 1 = 0 \end{cases}$ i płaszczyzną $\pi : x + y = 0$;

(c) prostymi $l_1 : x = -t,\ y = 1 + 2t,\ z = -3\ (t \in \mathbb{R})$, $l_2 : x = 0,\ y = -2s,\ z = 2 + s\ (s \in \mathbb{R})$.

★★★

65. Niech $\boldsymbol{a} = (3, -3, 0, 9)$, $\boldsymbol{b} = (1, 2, 1, 4)$ będą wektorami z przestrzeni $\mathbb{R}^4$. Wyznaczyć wektory:

(a) $\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$; (b) $\boldsymbol{x} = \dfrac{1}{3}\boldsymbol{b} + 3\boldsymbol{a}$.

66. Obliczyć:

(a) odległość punktów $A = (1, -2, 3, 0, 0)$, $B = (0, 1, -2, 3, -4)$ w przestrzeni $\mathbb{R}^5$;

(b) kąt między wektorami $\boldsymbol{a} = (-1, 0, 2, 2)$, $\boldsymbol{b} = (0, -2, 1, -2)$ w przestrzeni $\mathbb{R}^4$.

67. We wskazanej przestrzeni zbadać liniową niezależność układów wektorów:

(a) $\mathbb{R}^2,\ \boldsymbol{a}_1 = (2, 3),\ \boldsymbol{a}_2 = (-1, 0)$;

(b) $\mathbb{R}^3,\ \boldsymbol{b}_1 = (1, 2, 3),\ \boldsymbol{b}_2 = (3, 2, 1),\ \boldsymbol{b}_3 = (1, 1, 1)$;

(c) $\mathbb{R}^4,\ \boldsymbol{c}_1 = (1, 0, 0, 0),\ \boldsymbol{c}_2 = (-1, 1, 0, 0),\ \boldsymbol{c}_3 = (1, -1, 1, 0),\ \boldsymbol{c}_4 = (-1, 1, -1, 1)$.

68. Zbadać, czy układy wektorów są bazami wskazanych przestrzeni liniowych $\mathbb{R}^n$,

(a) $\{(1, 2, 0),\ (-1, 0, 3),\ (0, -2, -3)\},\quad \mathbb{R}^3$;

(b) $\{(1, 0, 0, 0),\ (1, 1, 0, 0),\ (1, 1, 1, 0),\ (1, 1, 1, 1)),\quad \mathbb{R}^4$;

(c) $\{(1, -1, 0, 2),\ (1, 0, 3, 0),\ (0, 1, 3, 0),\ (0, 0, 0, 1)\},\quad \mathbb{R}^4$.

69. Znaleźć bazy i wymiary podprzestrzeni:

(a) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x + 2y - z = 0\}$;

(b) $B = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x = 2y = -t\}$;

(c) $C = \{(u, v, x, y, z) \in \mathbb{R}^5 : u + v = 0,\ x + y + x = 0\}$.

70. Zbadać, czy przekształcenia są liniowe:

(a) $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\quad F(x_1, x_2) = x_1 - 3x_2$; (b) $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\quad F(x, y, z) = (-x, 5x + y, y - 2z)$;

(c) $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^4,\quad F(x) = (0, x^2, 0, -3x)$; (d) $F : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\quad F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1x_2, x_3x_4)$.

71. Znaleźć macierze przekształceń liniowych w standardowych bazach:

(a) $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\quad F(x, y) = (x, y, x - y)$;

(b) $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4,\quad F(x, y, z) = (y, z, x, x + y + z)$;

(c) $F : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\quad F(x, y, z, t) = (x + y + z + t, y - t,)$.

72. (a) Uzasadnić, że obrót na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ wokół początku układu współrzędnych o kat φ jest przekształceniem liniowym. Znaleźć macierz tego obrotu w bazach standardowych.

(b) Pokazać, że symetria względem osi Oz w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ jest przekształceniem liniowym. Znaleźć macierz tej symetrii w bazach standardowych.

73. Dane są przekształcenia liniowe: $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ określone wzorem $L(x, y) = (x, y, x + y)$ oraz $K : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ określone wzorem $K(u, v, w) = u - w$. Korzystając z twierdzenia o postaci macierzy złożenia przekształceń znaleźć macierz przekształcenia $K \circ L$.

★★★

74. Korzystając z interpretacji geometrycznej przekształceń liniowych znaleźć ich jądra, obrazy i rzędy:

(a) $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, obrót o kąt $\alpha = \pi/3$ wokół początku układu;

(b) $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, rzut prostokątny na prostą $x + y = 0$;

(c) $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, symetria względem płaszczyzny $y = z$;

(d) $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, obrót wokół osi Oy o kąt$\pi/2$.

75. Wyznaczyć jądra, obrazy oraz rzędy przekształceń liniowych:

(a) $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $F(x_1,x_2) = x_1 - 3x_2$;

(b) $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = (x + y, 2x + 2y)$;

(c) $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $F(x, y, z) = (-x, 5x + y, y - 2z)$;

(d) $L : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^4$, $F(x) = (0, x, 0, -x)$.

76. Korzystając z definicji wyznaczyć wektory i wartości własne przekształceń liniowych:

(a) symetria względem osi Oy w przestrzeni $\mathbb{R}^2$;

(b) obrót w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ wokół osi Ox o kąt $\pi/6$;

(c) symetria w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ względem płaszczyzny yOz;

(d) rzut prostokątny na oś Oy w przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

77. Znaleźć wartości i wektory własne przekształceń liniowych:

(a) $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = (x + y, 2x + 2y)$;

(b) $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $F(x, y, z) = (-x, 5x + y, y - 2z)$;

(c) $L : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, $F(x, y, z, t) = (0, x, 0, y)$.

★★★

78. (P) Napisać równanie okręgu, którego średnicą jest odcinek o końcach $A = (-1, 3)$, $B = (5, 7)$.

79. (P) Wyznaczyć współrzędne środka i promień okręgu $x^2 - 4x + y^2 + 6y + 2 = 0$.

80. (P) Znaleźć równanie okręgu opisanego na trójkącie ABC o wierzchołkach $A = (0, 0)$, $B = (8, 0)$, $C = (0, 6)$.

81. Wyznaczyć równanie okręgu, o środku $S = (3, 4)$, który jest styczny do prostej $l : 3x-4y-12 = 0$.

82. Znaleźć równanie okręgu, który przechodzi przez punkty $P = (3, 4)$, $Q = (5, 2)$ i ma środek na osi Ox.

83. Dolna połowa okręgu $x^2 + 8x + y^2 - 10y + 2 = 0$ jest wykresem funkcji f zmiennej x. Wyznaczyć funkcję f oraz określić jej dziedzinę.

84.* Znaleźć równanie okręgu, który jest styczny do obu osi układu współrzędnych oraz przechodzi przez punkt $A = (5, 8)$. Ile rozwiązań ma zadanie?

85. Znaleźć równanie stycznej okręgu $x^2 + y^2 = 25$:

(a) w punkcie $(-3, 4)$;
(b) przechodzącej przez punkt $(-5, 10)$;
(c) równoległej do prostej $x - y - 4 = 0$;
(d) prostopadłej do prostej $x + 2y = 0$.

86. (P) Wyznaczyć osie, współrzędne ognisk oraz mimośród elipsy $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

87. Punkty $F_1 = (-5, 0)\,, F_2 = (5, 0)$ są ogniskami elipsy. Znaleźć równanie tej elipsy, jeżeli jednym z jej wierzchołków jest punkt $W = (0, -3)\,.$

88. Naszkicować elipsę o równaniu $4x^2 - 8x + 9y^2 + 36y + 4 = 0$.

89. Lewa połowa elipsy $4x^2 + 25y^2 = 100$ jest wykresem funkcji f zmiennej y. Znaleźć funkcję f oraz określić jej dziedzinę.

90. (P) Wyznaczyć osie, współrzędne ognisk oraz równania asymptot hiperboli $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$.

91. Narysować hiperbolę wraz z ogniskami i asymptotami:

(a) $9\,(y+5)^2 - 16\,(x-2)^2 = 144$; (b) $4x^2 - 25y^2 + 8x = 0$.

92. Wyznaczyć współrzędne ogniska, wierzchołka oraz podać równanie kierownicy paraboli o równaniu:

(a) $y^2 = 12x$; (b) $y = x^2 + 6x$.

93. Napisać równanie paraboli, której:

(a) kierownicą jest prosta $y = -2$, a punkt $W = (-1, 6)$ – wierzchołkiem;

(b) kierownicą jest prosta $x = 1$, a punkt $W = (5, 1)$ – wierzchołkiem.

94. Jakie krzywe przedstawiają równania:

(a) $x^2 - y^2 + 4 = 0$; (b) $(x-y)^2 = 1$; (c) $x^2 + y^2 = 2xy$?

Przykładowe zestawy zadań z kolokwiów i egzaminów

W rozwiązaniach zadań należy opisać rozumowanie prowadzące do wyniku, uzasadnić wyciągnięte wnioski, sformułować wykorzystane definicje, zacytować potrzebne twierdzenia (podać założenia i tezę), napisać zastosowane wzory ogólne (z wyjaśnieniem oznaczeń). Ponadto, jeśli jest to konieczne, należy sporządzić czytelny rysunek z pełnym opisem. Skreślone fragmenty pracy nie będą sprawdzane.

I kolokwium

Zestaw A

1. Liczba $z_1 = 2 - i$ jest pierwiastkiem wielomianu $W(z) = z^4 - 4z^3 + 3z^2 + 8z - 10$. Znaleźć pozostałe pierwiastki wielomianu.

2. Korzystając ze wzoru de Moivre'a obliczyć $\left(\sqrt{27} - 3i\right)^9$. Wynik podać w postaci algebraicznej.

3. Zapisać w postaci algebraicznej elementy pierwiastka $\sqrt[4]{-4}$.

Zestaw B

1. Wyznaczyć i narysować zbiór liczb zespolonych z, które spełniają warunek $|z - i + 2| \geqslant |4i - 3|$.

2. Podać w postaci algebraicznej elementy pierwiastka $\sqrt[3]{(2-3i)^6}$.

3. Funkcję wymierną $\dfrac{4x^3 - 3x^2 - 2x - 3}{x^4 - 1}$ rozłożyć na rzeczywiste ułamki proste.

Zestaw C

1. Nie wykonując dzielenia znaleźć resztę z dzielenia wielomianu $W(x) = 2x^{47} - 3x^5 + 4$ przez wielomian $P(x) = x^4 - 1$.

2. Rozwiązać równanie $(z - i)^3 = (1 + 2i)^3$.

3. Narysować zbiór liczb zespolonych z, które spełniają warunek $|z - 1 - 3i| \geqslant |z + 5|$.

Zestaw D

1. Znaleźć pierwiastki zespolone wielomianu $W(x) = x^3 + x + 10$.

2. Korzystając ze wzoru de Moivre'a obliczyć $\left(\dfrac{1 + \sqrt{3}i}{1 - i}\right)^8$. Wynik podać w postaci algebraicznej.

3. Narysować zbiór liczb zespolonych z, które spełniają warunek $\left|z^2 + 9\right| \leqslant 5\,|z + 3i|$.

II kolokwium

Zestaw A

1. Rozwiązać równanie macierzowe $X \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} = [1, -2, 5]$.

2. Znaleźć rzut punktu $P=(-2,0,3)$ na prostą $l:\begin{cases} x-y+2z-3=0,\\ 2x+y-z+1=0.\end{cases}$

3. Metodą eliminacji Gaussa rozwiązać układ równań $\begin{cases} 2x-\ \ y+3z=-3,\\ x+\ \ y-\ \ z=\ \ 4,\\ -x+3y+2z=\ \ 3,\\ x+\ \ y+\ \ z=\ \ 2.\end{cases}$

Zestaw B

1. Obliczyć odległość punktu $P=(2,1,3)$ od prostej k: $\begin{cases} x=1+\ \ t,\\ y=2-2t,\ (t\in\mathbb{R}).\\ z=\ \ \ \ \ \ \ t\end{cases}$

2. Napisać macierze przekształceń liniowych $L:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^3$, $K:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^2$, w bazach standardowych przestrzeni $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, jeżeli $L(x,y)=(x+3y,-x,x-2y)$, $K(u,v,w)=(u-v+2w,2v-u)$. Wyznaczyć macierz złożenia $L\circ K$.

3. Rozwiązać równanie macierzowe: $X^{-1}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\4&3&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&3&0\\0&-1&-2\end{bmatrix}$.

Zestaw C

1. Znaleźć równanie płaszczyzny, która zawiera punkty $A=(1,0,4)$, $B=(-2,3,5)$ oraz jest prostopadła do płaszczyzny $\pi: x-2y-3z+12=0$.

2. Dane są punkty $A=(1,2,-1)$, $B=(3,1,2)$. Na osi Oy znaleźć punkt C taki, aby pole trójkąta ABC było równe 10.

3. Układ równań $\begin{cases} x-2y+3z=0,\\ 3x+\ \ y-\ \ z=5,\\ x-\ \ y+2z=\ 2\end{cases}$ zapisać w formie macierzowej. Następnie korzystając z macierzy odwrotnej wyznaczyć jego rozwiązanie.

Zestaw D

1. Znaleźć obraz symetryczny punktu $P=(1,-2,0)$ względem płaszczyzny $\pi: 2x+y-z+1=0$.

2. Dla jakich wartości parametru p układ równań $\begin{cases} 2x+py-\ \ z=\ \ p,\\ \ \ \ \ \ \ -\ \ y+pz=-1,\\ -2\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ +1z=\ \ 1\end{cases}$ jest układem Cramera? Dla $p=1$ wyznaczyć x stosując wzory Cramera.

3. Jaką krzywą stożkową przedstawia równanie $4x^2+16x-25y^2+150y-309=0$? Znaleźć półosie i współrzędne ognisk.

Egzamin podstawowy

Zestaw A

1. Nie wykonując dzielenia znaleźć resztę z dzielenia wielomianu $x^{98}+17x^{95}+x^2-3x+1$ przez trójmian x^2+1.

2. Obliczyć odległość punktu $P = (1 - 2, 4)$ od prostej $l : \begin{cases} x + y - z = 2, \\ 2x - y + z = 4. \end{cases}$

3. Funkcję wymierną $\dfrac{3x^2 - 2x - 1}{x^3 + x^2 + x + 1}$ rozłożyć na ułamki proste.

4. Rozwiązać równanie macierzowe $X^{-1} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$.

5. Jaką krzywą przedstawia równanie $16\,(x-1)^2 - 9\,(y+3)^2 = 144$? Podać współrzędne środka i ognisk, długości półosi oraz równania asymptot krzywej oraz narysować ją.

Zestaw B

1. Rozwiązać równanie macierzowe $\left(X + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

2. Wiadomo, że $x_1 = 1 + i$ jest pierwiastkiem wielomianu $x^4 - 6x^3 + 15x^2 - 18x + 10$. Wyznaczyć pozostałe pierwiastki zespolone tego wielomianu.

3. Obliczyć odległość punktu $Q = (-2, 0, 1)$ od płaszczyzny: $\pi : \begin{cases} x = 2 + t, \\ y = s - 2t, \\ z = 1 - s \end{cases} \quad (s, t \in \mathbb{R})$.

4. Korzystając ze wzorów Cramera wyznaczyć niewiadomą y z układu równań: $\begin{cases} x - 2y + 3z = -5, \\ y - 2z = 5, \\ x + z = -1. \end{cases}$

5. Napisać wzór de Moivre'a i następnie obliczyć $\left(i\sqrt{3} - \sqrt{3}\right)^{18}$. Wynik podać w postaci algebraicznej.

Zestaw C

1. Korzystając ze wzoru de Moivre'a obliczyć $\left(i\sqrt{3} - 1\right)^{16}$. Wynik podać w postaci algebraicznej.

2. Metodą bezwyznacznikową obliczyć macierz odwrotną do macierzy: $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Sprawdzić wynik wykonując odpowiednie mnożenie.

3. Trójkąt o wierzchołkach $A = (-1, 0, 4)$, $B = (1, 2, 5)$, $C = (0, 3, -1)$ przesunięto o wektor $\boldsymbol{v} = (2, 3, -1)$. Obliczyć objętość graniastosłupa pochyłego powstałego w czasie przesunięcia.

4. Wektory $\boldsymbol{a}_1 = (1, 1, 0, 0)$, $\boldsymbol{a}_2 = (0, 1, 1, 0)$, $\boldsymbol{a}_3 = (0, 0, 1, 1)$ uzupełnić do bazy przestrzeni $\mathbb{R}^4$.

5. Funkcję wymierną $\dfrac{5x^3 + 3x + 4}{x^4 - 1}$. rozłożyć na ułamki proste.

Zestaw D

1. Rozwiązać równanie $(z-i)^3+1=0$. Pierwiastki zapisać w postaci algebraicznej.

2. Wyznaczyć macierz X z równania $\begin{bmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot X^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$.

3. Znaleźć obraz symetryczny punktu $P=(1,-2,0)$ względem prostej $l: \begin{cases} x+y-z+3=0, \\ 2x-y+3z-4=0. \end{cases}$

4. Narysować zbiór liczb zespolonych spełniających warunek: $\left|\dfrac{z-4-i}{z+2}\right| \geqslant 1$.

5. W bazach standardowych wyznaczyć macierz przekształcenia liniowego L, które jest symetrią przestrzeni $\mathbb{R}^3$ względem osi Oy.

Egzamin poprawkowy

Zestaw A

1. Funkcję wymierną $\dfrac{6x^2-5x+2}{x^4-2x^3+x^2}$ rozłożyć na sumę rzeczywistych ułamków prostych.

2. Wyznaczyć macierz X z równania $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot X^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$.

3. Znaleźć rzut prostopadły punktu $P=(-1,0,3)$ na prostą $l: \begin{cases} x+y=3, \\ y-z=2. \end{cases}$

4. Wyznaczyć jądro i obraz przekształcenia liniowego $L:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ określonego wzorem $L(x,y,z) = (x+y-z, 2x-y, 3y-2z)$.

5. Metodą eliminacji Gaussa rozwiązać układ równań $\begin{cases} 2x - y + 3z = -3, \\ x + y - z = 4, \\ -x + 3y + 2z = 3, \\ x + y + z = 2. \end{cases}$

Zestaw B

1. Podać wzór do wyznaczania pierwiastków n-tego stopnia liczby zespolonej z. Następnie obliczyć $\sqrt[3]{-8i}$. Wynik podać w postaci algebraicznej.

2. Rozwiązać układ równań $\begin{cases} x - 2y + 3z - 3t = -1, \\ 2x - 4y + 8z - 6t = 4. \end{cases}$

3. Znaleźć równanie prostej, która zawiera punkt $A=(3,0,-1)$ i przecina prostą $l: x=1-t$, $y=3+2t$, $z=2+t$ $(t\in\mathbb{R})$ pod kątem prostym.

4. Dane są punkty $A=(1,2,3)$, $B=(-1,0,6)$, $C=(1,3,-1)$, $D=(2,p,3)$. Dla jakiego p, objętość czworościanu $ABCD$ będzie równa 13?

5. Narysować zbiór liczb zespolonych, które spełniają nierówność $\left|z^2+4z+4\right| \geqslant |z+2|\,|z-3i|$.

Zestaw C

1. Narysować zbiór liczb zespolonych, które spełniają nierówność $|(1-i)\,z-2i|<|7-i|\,.$

2. Funkcję wymierną $\dfrac{x^5-x^3+x+1}{x^3+x}$ przedstawić jako sumę wielomianu i rzeczywistych ułamków prostych.

3. Znaleźć równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt $P=(1,2,-3)$ i prostopadłej do prostej

$$l:\begin{cases} x+y-z=2,\\ x+z=0.\end{cases}$$

4. Obliczyć wysokość czworościanu o wierzchołkach $A=(1,0,-1)$, $B=(2,2,2)$, $C=(3,4,5)$, $D=(-3,4,-2)$ opuszczoną z wierzchołka D.

5. Rozwiązać równanie macierzowe $\begin{bmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\4&3&1\end{bmatrix}^{-1}\cdot\left(Y+\begin{bmatrix}1&-2&3\\0&4&1\\2&5&0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&3&0\\0&-1&-2\end{bmatrix}.$

Zestaw D

1. Jednym z pierwiastków wielomianu $W(x)=2z^3+5z^2+6z+2$ jest liczba wymierna. Znaleźć wszystkie pierwiastki zespolone tego wielomianu.

2. Rozwiązać równanie macierzowe $X\cdot\begin{bmatrix}-2&4&-1\\3&1&0\\-1&0&0\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&-2&-3\\0&-1&2\end{bmatrix}.$

3. Podać interpretację pierwiastka n-tego stopnia liczby zespolonej z i obliczyć $\sqrt[4]{8\left(\sqrt{3}i-1\right)}$. Wynik zapisać w postaci algebraicznej.

4. Trzy wierzchołki równoległoboku $ABCD$ mają współrzędne: $A=(1,3,-1)\,,B=(0,3,4)\,,\ C=(2,-2,5)\,.$ Znaleźć współrzędne czwartego wierzchołka i wysokość równoległoboku opuszczoną z wierzchołka C.

5. Rozwiązać układ równań $\begin{cases} x-2y+z-3t=2,\\ 2x+y-z-t=-3,\\ x-7y+2z-8t=1.\end{cases}$